

İÇERME ve DIŞARMA PRENSİBİ

Bu çalışmamda sayma ilkelerine ek olarak geliştirilen yeni bir yöntemi aktarmaya çalışacağım. Genel teoremi vermeden önce iki örnekle konuya giriş yapalım.

ÖRNEK 1

200 kişinin okuduğu Hacettepe Hukuk öğrencilerinin kümesini H sembolize etsin. Böylece öğrencilerin oluşturduğu bu kümenin eleman sayısı $|H| = 200$ olur. Bu öğrencilerden 95 tanesi İnsan Hakları Hukuku dersini, 48 tanesi de Spor Hukuku dersini alıyor olsun. İnsan hakları hukuku dersini alanların oluşturduğu kümeyi k_1 ile Spor hukuku dersini alanların oluşturduğu kümeyi de k_2 ile gösterelim. Böylece $s(k_1) = 95$ ve $s(k_2) = 48$ olur. Ayrıca her iki dersi de alan 20 öğrenci olsun. Bunların oluşturduğu kümeyi de k_1k_2 ile gösterelim. Yani $s(k_1k_2) = 20$ dir. Bu durumda İnsan hakları hukuku veya spor hukuku dersini alan öğrencilerin oluşturduğu kümenin eleman sayısı

$$s(k_1 \text{ veya } k_2) = s(k_1) + s(k_2) - s(k_1k_2) = 95 + 48 - 20 = 123$$

olur. Ayrıca insan hakları dersini almayanların oluşturduğu kümeyi $\overline{k_1}$ ile gösterirsek, $s(\overline{k_1}) = 200 - 95 = 105$; spor hukuku dersini almayanların oluşturduğu kümeyi de $\overline{k_2}$ ile gösterirsek $s(\overline{k_2}) = 200 - 48 = 152$ olacaktır. Son olarak her iki dersi de almayanların oluşturduğu kümeyi $\overline{k_1k_2}$ ile gösterirsek, bu kümenin eleman sayısı da

$$\begin{aligned} s(\overline{k_1k_2}) &= |H| - s(k_1 \text{ veya } k_2) \\ &= |H| - [s(k_1) + s(k_2)] + s(k_1k_2) \\ &= 200 - 123 \\ &= 77 \end{aligned}$$

olur.

Yazdığımız $s(\overline{k_1k_2}) = |H| - [s(k_1) + s(k_2)] + s(k_1k_2)$ eşitliğini biraz daha soyut biçimde yorumlamaya çalışalım. Bu 200 kişi arasından herhangi biri bu derslerin ikisini de almıyorsa hem $s(\overline{k_1k_2})$ içinde hem de $|H|$ içinde sayılır. Böylece bu kişiler için eşitlik sağlanır, çünkü bu sayımda $1 = 1$ olacaktır. Öte yandan eğer bu 200 kişi arasından herhangi biri bu derslerden sadece birini alıyorsa – örneğin insan hakları hukuku dersini – bu durumda eşitliğin solunda sayılmaz, fakat 1 kez $|H|$ içinde, 1 kez de $s(k_1)$ içinde sayılır. Dolayısıyla eşitlik yine sağlanır çünkü $0 = 1 - 1$ olur. Son olarak, 200 kişi arasından herhangi biri bu derslerin her ikisini de alıyorsa eşitliğin solunda yine sayılmaz, fakat sağındaki her küme içinde 1 kez sayılır. Bu durumda da eşitlik tekrar sağlanır. Çünkü $0 = 1 - (1 + 1) + 1 = \binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$ dir. Böylece eşitliğin genel olarak k_1 ve k_2 gibi koşullu durumlar için daima sağlanacağını göstermiş olduk.

ÖRNEK 2

Birinci örnekteki iki derse ek olarak 36 kişinin de Fransızca dersini, 10 kişinin hem Fransızca hem de İnsan hakları hukuku dersini, 7 kişinin hem Fransızca hem de Spor hukuku dersini ve 15 kişinin de bu üç dersi aldığını düşünelim. Fransızca dersini alan öğrencilerin oluşturduğu kümeyi de k_3 ile gösterirsek $s(k_3) = 36$, $s(k_1k_3) = 10$, $s(k_2k_3) = 7$ ve $s(k_1k_2k_3) = 15$ yazılabilir. Bu durumda bu üç dersin hiçbirini almayanların oluşturduğu kümenin eleman sayısı

$$\begin{aligned} s(\overline{k_1k_2k_3}) &= |H| - [s(k_1) + s(k_2) + s(k_3)] + [s(k_1k_2) + s(k_1k_3) + s(k_2k_3)] - s(k_1k_2k_3) \\ &= 200 - [95 + 48 + 36] + [20 + 10 + 7] - 15 \\ &= 43 \end{aligned}$$

bulunur. Yazdığımız bu son eşitlik bir Venn şeması çizilerek elde edilebilir. Ayrıca lise seviyesinde kümeler konusunda gösterilen bir eşitlik olduğu da hatırlanabilir. Birinci örnekte olduğu gibi bu eşitliği de biraz soyut biçimde yorumlayalım.

- 200 kişi arasından herhangi biri bu derslerden hiçbirini almıyorsa eşitliğinde solunda $s(\overline{k_1 k_2 k_3})$ ve sağında $|H|$ içinde 1 er kez sayılacağı için eşitlik sağlanacaktır.
- 200 kişi arasından herhangi biri bu derslerden sadece birini alıyorsa – örneğin Fransızca – eşitliğin solunda sayılmayacak ama sağında 1 kez $|H|$ içinde 1 kez de $s(k_3)$ içinde sayılacağından eşitlik tekrar sağlanacaktır. ($0 = 1 - 1$)
- 200 kişi arasından herhangi biri bu derslerden herhangi ikisini alıyorsa – örneğin Fransızca ve Spor hukuku – eşitliğin solunda sayılmayacak ama sağında 1 er kez $|H|$, $s(k_3)$, $s(k_2)$ ve $s(k_2 k_3)$ içinde sayılacağından eşitlik tekrar sağlanacaktır. ($0 = 1 - (1 + 1) + 1$)
- Son olarak 200 kişi arasından herhangi biri bu derslerden her üçünü de alıyorsa eşitliğin solunda sayılmayacak ama sağındaki her küme içinde 1 er sayılacağından eşitlik tekrar sağlanacaktır, çünkü bu durumda da

$$0 = 1 - [1 + 1 + 1] + [1 + 1 + 1] - 1 = \binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3}.$$

Böylece sonlu bir H kümesinin k_1 , k_2 ve k_3 koşullu üç alt kümesinin hiçbirinde bulunmayan elemanların oluşturduğu kümenin eleman sayısı için yukarıdaki eşitliğin daima doğru olduğu göstermiş olduk.

ÖRNEK 3

İlk iki örnekten faydalanırsak, sonlu bir H kümesinin k_1 , k_2 , k_3 ve k_4 gibi dört alt kümesinin hiçbirinde bulunmayan elemanların oluşturduğu kümenin eleman sayısının

$$\begin{aligned} s(\overline{k_1 k_2 k_3 k_4}) &= |H| - [s(k_1) + s(k_2) + s(k_3) + s(k_4)] \\ &\quad + [s(k_1 k_2) + s(k_1 k_3) + s(k_1 k_4) + s(k_2 k_3) + s(k_2 k_4) + s(k_3 k_4)] \\ &\quad - [s(k_1 k_2 k_3) + s(k_1 k_2 k_4) + s(k_1 k_3 k_4) + s(k_2 k_3 k_4)] \\ &\quad + s(k_1 k_2 k_3 k_4) \end{aligned}$$

eşitliği ile gösterebiliriz. Bunu kanıtlamak için H kümesinin rastgele bir x elemanını düşünelim.

- Eğer x bu alt kümelerden birinde değilse, 1 kez eşitliğin solunda 1 kez de H kümesinde sayılır.
- Eğer x bu alt kümelerden sadece birinde – örneğin k_1 – ise, eşitliğin solunda sayılmaz, fakat 1 kez H kümesinde, 1 kez de k_1 de sayılır. Yani toplamda $1 - 1 = 0$ olup, eşitlik doğrulanır.
- Eğer x bu alt kümelerden sadece ikisinde – örneğin sadece k_1 ve k_2 – ise, eşitliğin solunda sayılmaz, fakat 1 er kez H ,

$$k_1, k_2 \text{ ve } k_1 k_2 \text{ kümelerinde sayılır. Yani toplamda } 1 - [1 + 1] + 1 = \binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 0 \text{ olup, eşitlik doğrulanır.}$$

- Eğer x bu alt kümelerden sadece üçünde – örneğin sadece k_1 , k_2 ve k_3 – ise, eşitliğin solunda sayılmaz, fakat 1 er kez H , k_1 , k_2 , k_3 , $k_1 k_2$, $k_1 k_3$, $k_2 k_3$ ve $k_1 k_2 k_3$ kümelerinde sayılır. Yani toplamda

$$1 - [1 + 1 + 1] + [1 + 1 + 1] - 1 = \binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 0 \text{ olup, eşitlik doğrulanır.}$$

- Eğer x bu alt kümelerden hepsinde ise, eşitliğin solunda sayılmaz, fakat eşitliğin sağındaki 16 kümenin her birinde 1 er sayılır. Yani toplamda

$$1 - [1 + 1 + 1 + 1] + [1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1] - [1 + 1 + 1 + 1] + 1 = \binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 0 \text{ olup, eşitlik}$$

doğrulanır.

Böylece eşitliğin her iki tarafının da herhangi bir x elemanını eşit biçimde saydığını göstererek eşitliğin doğru olduğunu kanıtlamış olduk.

Artık içerme dışarma prensibi için genel bir teorem verebiliriz. Öncelikle bir H kümesi ile onun belli koşullarını taşıyan $k_1, k_2, \dots, k_n$ alt kümeleri için birkaç gösterim hakkında bilgi verelim. H kümesinin eleman sayısını $|H| = S$ ile, $1 \leq i \leq n$

olmak üzere, k_i alt kümesinin eleman sayısını da $s(k_i)$ ile gösterelim. $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ve $i \neq j$ olmak üzere, $s(k_i k_j)$ ile k_i ve k_j koşullarını taşıyan elemanlarının sayısını gösterelim. ($k_i k_j$ ile bu iki kümenin kesişimini ifade ettiğimizden diğer koşullarla birlikte düşünüldüğünde bu kümede diğer bazı koşulları sağlayan elemanların da bulunabileceğine dikkat etmek gerekir.) Benzer biçimde $1 \leq i, j, t \leq n$ birbirinden farklı tam sayıları için $s(k_i k_j k_t)$ ile bu üç koşulun kesişim kümesinin eleman sayısını ifade edelim (bu kümede de diğer bazı koşullar yer alabilir). Son olarak $s(\overline{k_1 k_2 k_3 \dots k_n}) = \bar{S}$ ile bu koşulların hiçbirini sağlamayan elemanların sayısını ifade edelim.

TEOREM (İçerme – Dışarma Prensibi)

Eleman sayısı S olan bir H kümesinin $1 \leq i \leq n$ için birbirinden farklı k_i alt kümelerinden hiçbirinde yer almayan elemanlarının sayısını $\bar{S} = s(\overline{k_1 k_2 k_3 \dots k_n})$ ile gösterirsek

$$\begin{aligned} \bar{S} = & S - [s(k_1) + s(k_2) + \dots + s(k_n)] \\ & + [s(k_1 k_2) + s(k_1 k_3) + \dots + s(k_1 k_n) + s(k_2 k_3) + \dots + s(k_{n-1} k_n)] \\ & - [s(k_1 k_2 k_3) + s(k_1 k_2 k_4) + \dots + s(k_1 k_2 k_n) + s(k_1 k_3 k_4) + \dots + s(k_1 k_3 k_n) + \dots + s(k_{n-2} k_{n-1} k_n)] \\ & + \dots + (-1)^n s(k_1 k_2 \dots k_n) \end{aligned}$$

veya

$$\bar{S} = S - \sum_{1 \leq i \leq n} [s(k_i)] + \sum_{1 \leq i < j \leq n} [s(k_i k_j)] - \sum_{1 \leq i < j < t \leq n} [s(k_i k_j k_t)] + \dots + (-1)^n s(k_1 k_2 \dots k_n)$$

olur.

Kanıt: Tümevarım yöntemiyle bir kanıt verilebilir. Fakat yukarıdaki örneklerde kullandığımız kanıtların benzerini yapacağız. H kümesinin bir x elemanı bu alt kümelerden hiçbirinde değilse, eşitliğin solunda $\bar{S}$ ve sağında S içinde 1 er kez sayılırken diğer kümelerde sayılmazlar. Böylece eşitlik bu durumda sağlanır. Diyelim ki x elemanı verilen alt kümelerden r tanesinin elemanı olsun. Bu durumda eşitliğinde solunda bu eleman sayılmaz. Fakat

- (1) Bir kez S de sayılır.
- (2) r kez $\sum_{1 \leq i \leq n} [s(k_i)]$ de sayılır.
- (3) $\binom{r}{2}$ kez $\sum_{1 \leq i < j \leq n} [s(k_i k_j)]$ de sayılır. (r alt kümeden seçilen 2 alt kümenin kesişimlerinin her biri)
- (4) $\binom{r}{3}$ kez $\sum_{1 \leq i < j < t \leq n} [s(k_i k_j k_t)]$ de sayılır. (r alt kümeden seçilen 3 alt kümenin kesişiminin her biri)
-
- $(r+1) \binom{r}{r} = 1$ kez $\sum s(k_{i_1} k_{i_2} k_{i_3} \dots k_{i_r})$ de sayılır.

Sonuç olarak x elemanı eşitliğin sağında (binom açılımı gereği)

$$1 - r + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \dots + (-1)^r \binom{r}{r} = [1 + (-1)]^r = 0$$

kez sayılır. Böylece eşitliğin herhangi bir x elemanını her iki tarafında da eşit saydığını göstermiş oluruz.

Farklı örneklere geçmeden önce gösterim biçimi olarak

$$S_0 = S$$

$$S_1 = [s(k_1) + s(k_2) + \dots + s(k_n)]$$

$$S_2 = [s(k_1k_2) + s(k_1k_3) + \dots + s(k_1k_n) + s(k_2k_3) + \dots + s(k_{n-1}k_n)]$$

ve genel olarak

$$S_k = \sum s(k_{i_1}k_{i_2}k_{i_3} \dots k_{i_r}), \quad (1 \leq r \leq n)$$

seçersek teoremden verdiğimiz eşitlik

$$\bar{S} = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^n S_n$$

biçimini alır.

ÖRNEK 4

1 ve 100 dahil bu sayılar arasında yer alan tam sayılardan kaç tanesi 2,3 veya 5 sayılardan hiçbirine bölünmez?

Çözüm

$\lfloor x \rfloor$ ile x sayısının tam kısmını ifade edelim.

2 ye bölünenlerin kümesine k_1 dersek, $s(k_1) = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50$; 3 e bölünenler kümesine k_2 dersek, $s(k_2) = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$ ve 5 e bölünenler kümesine k_3 dersek, $s(k_3) = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20$ olur. 2 ve 3 e bölünenlerin sayısı $s(k_1k_2) = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$, 2 ve 5 e bölünenlerin sayısı $s(k_1k_3) = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10$, 3 ve 5 e bölünenlerin sayısı $s(k_2k_3) = \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor = 6$ ve her üçüne de bölünenlerin sayısı $s(k_1k_2k_3) = \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3$ olur. O halde bu üç sayıdan hiçbirine bölünemeyenlerin sayısı

$$s(\overline{k_1k_2k_3}) = S - S_1 + S_2 - S_3 = 100 - [50 + 33 + 20] + [16 + 10 + 6] - 3 = 26$$

bulunur.

ÖRNEK 5

x_1, x_2, x_3 ve x_4 doğal sayıları için $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ ve $x_i \leq 6$ ($i \in \{1,2,3,4\}$) koşullarını sağlayan kaç farklı (x_1, x_2, x_3, x_4) sıralı dördlüsü vardır?

Çözüm

Tekrarlı gruplandırma (kombinasyon) gereği sadece $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ eşitliğini sağlayan $\binom{15+4-1}{4-1} = \binom{18}{3}$ kadar sıralı dördlü yazılabilir. Diğer koşulu sağlamak için k_i alt kümesini $x_i \geq 7$ olacak biçimde tanımlayalım. Simetri gereği $s(k_1) = s(k_2) = s(k_3) = s(k_4)$ olacaktır. k_1 in eleman sayısını bulmak için x_1 değerini 7 den başlatmamız gerekir. Böylece $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ denkleminin çözüm sayısı $s(k_1) = \binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3}$ olur. Böylece $S_1 = 4 \cdot \binom{11}{3}$ olur. Benzer biçimde x_1 ve x_2 değerlerinin her ikisini de 7 den başlatırsak, $s(k_1k_2)$ değeri $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ denkleminin çözüm sayısı olur. Böylece $s(k_1k_2) = \binom{1+4-1}{4-1} = \binom{4}{3}$ olurken $S_2 = \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3}$ olur. Ayrıca, x_i değerlerinden üçünü birden 7 den başlatamayacağımızdan $s(k_ik_jk_t) = 0$ ve $s(k_1k_2k_3k_4) = 0$ dır. O halde istenilen koşulları sağlayan dördlülerin sayısı

$$s(\overline{k_1k_2k_3k_4}) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = \binom{18}{3} - 4 \cdot \binom{11}{3} + \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3} - 0 + 0 = 180$$

bulunur.

ÖRNEK 6 (Örten Fonksiyon Sayısı)

$m \geq n$ olmak üzere, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ve $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ sonlu kümelerinde A dan B ye kaç farklı örten fonksiyon tanımlanabilir?

Çözüm

$f : A \rightarrow B$ olacak biçimde A dan B ye n^m farklı f fonksiyonunun tanımlanabileceğini biliyoruz. Bu durumda $S = S_0 = n^m$ olsun. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere A dan B ye tanımlı tüm fonksiyonlar kümesinin b_i elemanını içermeyen alt kümesini k_i olarak tanımlayalım. Bu durumda k_i kümesindeki fonksiyonların değer kümesinde b_i elemanı yer almaz. Böylece $s(\overline{k_i})$, değer kümesinde b_i elemanı bulunan fonksiyonların sayısını vereceğinden, A dan B ye tanımlı örten fonksiyon sayısı $s(\overline{k_1 k_2 \dots k_n})$ olur. Dikkat edilirse B kümesinden b_i elemanını çıkardığımız için $s(k_i) = (n-1)^m$ dir. Benzer biçimde $1 \leq i < j \leq n$ olmak üzere, b_i ve b_j elemanlarını değer kümesinde içermeyen fonksiyon sayısı $s(k_i k_j) = (n-2)^m$ dir. Böylece

$S_1 = [s(k_1) + s(k_2) + \dots + s(k_n)] = n \cdot (n-1)^m$ ve $S_2 = [s(k_1 k_2) + \dots + s(k_{n-1} k_n)] = \binom{n}{2} \cdot (n-2)^m$ dir. Genel olarak, $1 \leq r \leq n$ olmak üzere,

$$S_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} s(k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_r}) = \binom{n}{r} \cdot (n-r)^m$$

dir. Bu durumda A dan B ye örten fonksiyon sayısı

$$\begin{aligned} s(\overline{k_1 k_2 \dots k_n}) &= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^n S_n \\ &= n^m - \binom{n}{1} \cdot (n-1)^m + \binom{n}{2} \cdot (n-2)^m - \binom{n}{3} \cdot (n-3)^m \\ &\quad + \dots + (-1)^n \cdot (n-n)^m \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örneğin 4 elemanlı bir A kümesinden 3 elemanlı bir B kümesine tanımlanabilecek örten fonksiyon sayısı $m = 4$ ve $n = 3$ için

$$\begin{aligned} s(\overline{k_1 k_2 k_3}) &= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 \\ &= \sum_{i=0}^3 (-1)^i \binom{3}{i} (3-i)^4 \\ &= 3^4 - \binom{3}{1} \cdot 2^4 + \binom{3}{2} \cdot 1^4 - \binom{3}{3} \cdot 0 \\ &= 36 \end{aligned}$$

olur.

ÖRNEK 7 (Evli çiftler)

4 evli çift yuvarlak bir masa etrafında herhangi karı-koca yanyana gelmeyecek biçimde kaç farklı biçimde oturabilir?

Çözüm

Öncelikle $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere, k_i ile i . karı-kocanın yanyana oturduğu durumları ifade edelim. Bu durumda bunları 1 kişi gibi sayıp, toplamda 7 kişiyi yuvarlak bir masa etrafında sıralamış oluruz. Tabii karı-kocanın kendi arasındaki 2 farklı biçimde yer değiştirme durumlarını da göz önüne almamız gerekir. O halde $s(k_i) = 2 \cdot (7-1)! = 2 \cdot 6!$ olur. Bu durumda

$S_1 = \binom{4}{1} \cdot 2 \cdot 6!$ dir. Benzer biçimde 2 çiftin birlikte oturduğu durum sayısı $S_2 = \binom{4}{2} \cdot 2^2 \cdot 5!$ olur. 3 çiftin yanyana oturduğu durum sayısı $S_3 = \binom{4}{3} \cdot 2^3 \cdot 4!$ ve tüm çiftlerin yanyana oturduğu durum sayısı $S_4 = \binom{4}{4} \cdot 2^4 \cdot 3!$ dir. Ayrıca koşulsuz bu 8 kişinin yuvarlak masada oturma sayısı da $S_0 = 7!$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} s(\overline{k_1 k_2 k_3 k_4}) &= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 \\ &= 7! - \binom{4}{1} \cdot 2 \cdot 6! + \binom{4}{2} \cdot 2^2 \cdot 5! - \binom{4}{3} \cdot 2^3 \cdot 4! + \binom{4}{4} \cdot 2^4 \cdot 3! \\ &= 5040 - 5760 + 2880 - 768 + 96 \\ &= 1488 \end{aligned}$$

bulunur.

Kaynakça: *Ralph P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics (Fifth Edition)*