

XYZ koordinat sisteminde $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ için

dış çarpım vektörü

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

olduğunu biliyoruz.

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nün belirttiği açının ölçüsü θ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\| &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1b_2)^2 + (a_1b_3)^2 + (a_2b_1)^2 + (a_2b_3)^2 + (a_3b_1)^2 + (a_3b_2)^2 \\ &\quad - 2(a_1b_1a_2b_2 + a_1b_1a_3b_3 + a_2b_2a_3b_3) \\ &= (a_1b_1)^2 + (a_1b_2)^2 + (a_1b_3)^2 + (a_2b_1)^2 + (a_2b_2)^2 + (a_2b_3)^2 \\ &\quad + (a_3b_1)^2 + (a_3b_2)^2 + (a_3b_3)^2 - [(a_1b_1)^2 + (a_2b_2)^2 + (a_3b_3)^2] \\ &\quad + 2(a_1b_1a_2b_2 + a_1b_1a_3b_3 + a_2b_2a_3b_3) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 \cdot \cos^2 \theta \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 \cdot \sin^2 \theta \end{aligned}$$

bulunur.

O halde

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \theta$$

olur. ($0 \leq \theta \leq \pi$ olduğundan $|\sin \theta| = \sin \theta$ dir.)

Sonuçları:

1. Sıfır vektöründen farklı $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nün dış çarpımı $\vec{0}$ ise bu

vektörler paraleldir. Çünkü $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ olacağından

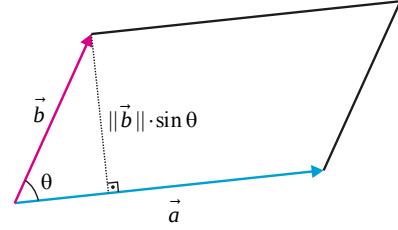
$\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \theta = 0$ olur. Bu durumda $\theta = 0$ veya $\theta = \pi$ dir. O

halde $\vec{a} \parallel \vec{b}$ dir. Özetle

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

olur.

2.



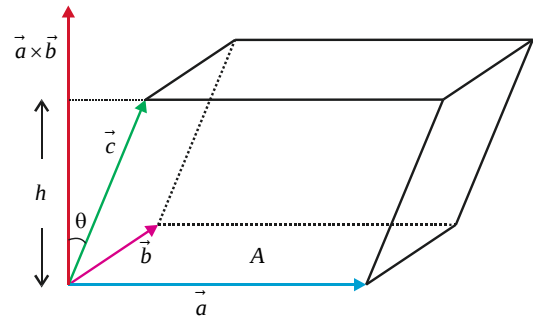
Şekildeki gibi $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ üzerine kurulu paralelkenarın alanı

$\|\vec{a}\| \cdot (\|\vec{b}\| \cdot \sin \theta)$ olacağından

$$Alan = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

olur.

3.



Şekildeki gibi $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ üzerine kurulu paralelyüzlünün hacmi

$V = A.h$ dir. Fakat biliyoruz ki

$$A = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

ve

$$h = \|\vec{c}\| \cdot |\cos \theta|$$

olacağından

$$V = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot |\cos \theta|$$

bulunur. Dikkat ederseniz $\vec{a} \times \vec{b}$ ile $\vec{c}$ nün belirttiği açının ölçüsü θ

olmak üzere, eşitliğin sağ tarafı $\vec{a} \times \vec{b}$ ile $\vec{c}$ nün iç çarpımının mutlak değerine eşittir. Yani

$$V = |\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle|$$

olur. Bu iç çarpımda $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ve

$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ yerine yazılırsa

$$V = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot c_3$$

yani

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

olur.